数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 159-166

Applications of hybrid universality to multivariable zeta-functions

Takashi Nakamura
Department of Mathematics Faculty of Science and Technology
Tokyo University of Science

Łukasz Pańkowski
Faculty of Mathematics and Computer Science, Adam Mickiewicz University

1 導入

このセクションでは，まずゼータ関数の普遍性について述べ，次に主定理を述べる．この主定理により，種々の多重ゼータ関数の普遍性が得られる．普遍性定理の歴史，証明，一般化等については [6], [11], [23] を参照して頂きたい．

1.1 ゼータ関数の普遍性

普遍性について記述するために，まず記号を用意する．meas(A) で集合 A の Lebesgue 測度とし，$\nu_T\{\ldots\} := T^{-1}\mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : \ldots\}$, $\ldots$ の部分には τ が充たす条件が書かれる．K と $K_1,\ldots,K_m$ を D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする．

Theorem A (Voronin). $f(s)$ を K 上で連続で零点を持たず，K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

この定理は普遍性定理（universality theorem）と呼ばれるものであり，おおまかに言えば，零点を持たない任意の正則関数は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の平行移動により一様に近似でき，しかも近似できる τ の密度は正であることを意味する．

次の定理は同時普遍性定理（joint universality theorem）と呼ばれるものである．

Theorem B (Bagchi, Gonek, Voronin, independently). $f_l(s)$ を K_l 上で連続で零点を持たず，K_l の内部で正則な関数とする．$\chi_1,\ldots,\chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{1\le l\le m}\max_{s\in K_l}\left|L(s+i\tau,\chi_l) - f_l(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

この定理は，零点を持たない任意の正則関数の組は，非同値な Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ の平行移動により一様に近似でき，近似できる τ の密度は正であることを意味する．

Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,\alpha)$ の普遍性定理については次のものがある．Hurwitz ゼータ関数はオイラー積を持たないこと，近似される関数に零点を持たないという仮定が必要ないことを注意しておく．このような場合を強普遍性を持つということにする．

Theorem C (Bagchi, Gonek, independently). α を超越数とする．$f(s)$ を K 上で連続で K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

$1/2\neq\alpha$ が有理数である場合の強普遍性は，余計な因子が付いたものは定理 B から導かれるものであり，それが取り除かれたものは Sander と Steuding [22] により証明されている．現在では数多くのゼータ関数が普遍性を持つことが証明されている．

1.2 Hybrid universality

このサブセクションではまず hybrid universality について述べる．これは適当な日本語訳がないので混合普遍性と仮に訳しておく．$\|x\|$ で実数 x の小数部分と書くことにする．$H(K)$ を K 上で連続で零点を持たず K の内部で正則な関数全体とする．さらに $H_0(K)$ を K 上で連続で K の内部で正則な関数全体とする．

Definition 1.1. L 関数の集合 $L_1,\dots,L_m$ が *hybrid joint universality* を持つとは，以下の性質を充たすことである．$f_l(s)\in H(K_l)$，$\{\alpha_j\}_{1\le j\le n}$ を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な実数とし，$\{\theta_j\}_{1\le j\le n}$ を実数とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{1\le l\le m}\max_{s\in K_l}|L_l(s+i\tau)-f_l(s)|<\varepsilon,\ \max_{1\le j\le n}\|\tau\alpha_j-\theta_j\|<\varepsilon\right\}>0.$$

これは前半部分が同時普遍性定理で，後半部分が Kronecker の近似定理である．L 関数の集合 $L_1,\dots L_m$ が hybrid joint strong universality を持つ場合とは，上の定義において $H(K_l)$ を $H_0(K_l)$ に換えればよい．歴史について簡単に触れる．この形の定理を初めに示したのは Gonek [2] である．その後 Kaczorowski と Kulas [5] により改良され，Pańkowski [20, 21] が最も一般的な形で述べている．この hybrid joint universality から次の定理が導かれる．ここで $\mathcal{S}$ を $\sigma>1/2$ で絶対収束する Dirichlet 級数の成す環とする．

Theorem 1.2. $L_1,\dots,L_m$ が *hybrid joint universality* を持つとし，$Q_1,\dots,Q_n\in\mathcal{S}$ する．$F\colon H(K)^{m+n}\to H(K)$ を任意の連続関数，$f_l(s)\in H(K)$ とし，$g(s):=F(f_1(s),\dots,f_m(s),Q_1(s),\dots,Q_n(s))$ とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{s\in K}|F(L_2(s+i\tau),\dots,L_m(s+i\tau),Q_1(s+i\tau),\dots,Q_n(s+i\tau))-g(s)|<\varepsilon,\right\}>0.$$

L 関数の集合 $L_1,\dots L_m$ が hybrid joint strong universality を持つ場合は，上の定理において $H(K)$ を $H_0(K)$ に換えればよい．上記の定理において $Q_1,\dots,Q_n\in\mathcal{S}$ がない場合は [7] で扱われている．この定理の証明や系などは，我々の論文 [17, 18] を参照して頂きたい．

2 多重ゼータ関数の普遍性

この章では先の定理を利用して，多重ゼータ関数の普遍性を導く．講究録 [16] では仮定が強すぎたり，弱すぎたりしているので，ここで訂正しておく．また [17, 18] では特別な概均質ベクトル空間のゼータ関数 [4] など他のゼータ関数の普遍性も扱っているが，ここでは Euler-Zagier Hurwitz type 多重ゼータ関数と Tornheim-Hurwitz type 2 重ゼータ関数の普遍性に限定する．これらの普遍性定理を証明するためには，$\sigma > 1/2$ で絶対収束する Dirichlet 級数が概周期性を持つことが必要になるので，先に挙げた論文 [7] ではこれらの定理は得られないと考えられる．

2.1 Euler-Zagier Hurwitz type 多重ゼータ関数

Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数を以下で定義する．

$$\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)}) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 0} \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}(n_2+\alpha_2)^{s_2}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}},$$

この級数は領域 $\Re(s_1) > 1$ かつ $\Re(s_j) \geq 1$, $2 \leq j \leq r$ で絶対収束し，全 $\mathbb{C}^r$ 平面に有理型に解析接続される．$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1$ であるとき上の関数を Euler-Zagier 多重ゼータ関数と呼び，さらに $s_1, \dots, s_m$ が整数であるときは多重ゼータ値と呼ばれるものであり，多くの数学者によって研究されている．多重ゼータ関数の解析接続についても同様である．ここでは Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数の解析接続として次の定理を挙げておく．

Lemma 2.1 (Akiyama and Ishikawa [1]). $\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ は $s_1 = 1$, $\sum_{j=1}^{k} s_j \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, $k = 2, 3, \dots, r$ 上に限り，*possible singularities* を持つ．

絶対収束域における $\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ の零については，$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ が代数的独立ならば，$\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ は $\Re(s_1) > 1$，$\Re(s_j) \geq 1$, $2 \leq j \leq r$ で無限個の零点を持つことが知られている．これは [15, Proposition 3.2] で証明されていることであるが，その証明を見れば，$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ に関する仮定はいくらか弱められることがすぐにわかる．

2.2 Euler-Zagier Hurwitz type 多重ゼータ関数 (変数を固定した場合の普遍性)

次の定理は [15, Theorem 2.1] で示されているが，Theorem 1.1 により簡単に証明できる．

Theorem 2.2. $(\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in (0,1]^{r-1}$, $\Re(s_2) > 3/2$, $\Re(s_j) \geq 1$, $3 \leq j \leq r$ なる $(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^{r-1}$ を固定する．$0 < \alpha_1 < 1$ は超越数とし $f(s_1)$ は K の内部で正則で，K で連続とする．$\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}\,; \alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) \neq 0$ であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T \left\{ \max_{s_1 \in K} \left| \zeta_r(s_1 + i\tau, s_{(2,\dots,r)}\,; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)}) - f(s_1) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Proof. $\Re(s_j) > 1,\ 1 \le j \le r$ とする．調和積公式により

$$\begin{aligned}
&\zeta(s_1\,;\alpha_1)\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) \\
&= \sum_{n_1\ge 0,\, n_2>\cdots>n_r\ge 0} \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}(n_2+\alpha_2)^{s_2}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}} \\
&= \Bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_r\ge 0} + \sum\nolimits^{*}\Bigg)\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}}.
\end{aligned}$$

を得る．ただし和 $\sum^*$ は以下の条件を充たす．

$$n_2 \ge n_1 > n_3 > \cdots > n_r \ge 0, \quad \cdots, \quad n_2 > n_3 > \cdots > n_r \ge n_1 \ge 0.$$

$\Re(s_j) > 1,\ 1 \le j \le r$ において

$$\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)}) := \sum\nolimits^{*} \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}},$$

と定義し，領域 Z を $1-\delta < \Re(s_1) < 1,\ \Re(s_2) > 1+\delta,\ \Re(s_j) \ge 1,\ 3 \le j \le r$ と定義する．領域 Z において $\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ は Z で絶対収束する．よって以下の等式を得る．

$$\begin{aligned}
&\zeta(s_1\,;\alpha_1)\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) = \\
&\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)}) + \zeta_r^*(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)}), \qquad (s_1, \dots, s_r) \in Z.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

したがって Theorem 1.1 により証明が終わる． □

同様に調和積公式 (2.1)，Theorem 1.1 と $\zeta(s,a)$ の普遍性により，次の定理を得る．$\alpha_1 = 1$ であるとき $\zeta(s,1)$ は強普遍性を持たないので，近似される関数 $\ne \zeta_r^*(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ という仮定が必要になることに注意する．

Theorem 2.3. $(\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in (0,1]^{r-1}$, $\Re(s_2) > 3/2$, $\Re(s_j) \ge 1$, $3 \le j \le r$ なる $(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^{r-1}$ を固定する．$f(s_1)$ は K の内部で正則で，K で連続かつ $f(s_1) \ne \zeta_r^*(s_1, s_{(2,\dots,r)}\,;1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ とする．このとき $\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) \ne 0$ であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{\max_{s_1\in K}\big|\zeta_r(s_1+i\tau, s_{(2,\dots,r)}\,;1, \alpha_{(2,\dots,r)}) - f(s_1)\big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Theorem 2.4. $(\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in (0,1]^{r-1}$, $\Re(s_2) > 3/2$, $\Re(s_j) \ge 1$, $3 \le j \le r$ なる $(s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^{r-1}$ を固定する．$\alpha_1 \ne 1, 1/2$ は有理数とし，$f(s_1)$ は K の内部で正則で，K で連続とする．$\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) \ne 0$ であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{\max_{s_1\in K}\big|\zeta_r(s_1+i\tau, s_{(2,\dots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)}) - f(s_1)\big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

2.3 Euler-Zagier Hurwitz type 多重ゼータ関数 (一変数関数とした場合の普遍性)

$\overline{\zeta}_r(s\,;\alpha) := \zeta_r(s,\dots,s\,;\alpha,\dots,\alpha)$ とおく．Hoffman の論文 [3] に基づき，次の記号を用意する．Σ_r を r 次対称群，Π_r を $\{1,2,\dots,r\}$ の分割とし，$\Pi=\{P_1,\dots,P_l\}$，

$$c(\Pi_r)=\prod_{j=1}^{l}(|P_j|-1)! \qquad \text{and} \qquad \zeta(s_{(1,2,\dots,r)};\alpha,\Pi_r)=\prod_{j=1}^{l}\zeta\left(\sum_{k\in P_j}s_k\,;\alpha\right).$$

と書く．[3, Theorem 2.1] と同様な議論により次の補題を得る．

Lemma 2.5. 特異点を除き，

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_r}\zeta(s_{(\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(r))}\,;\alpha,\dots,\alpha)=\sum_{\Pi_r}c(\Pi_r)\zeta(s_{(1,2,\dots,r)};\alpha,\Pi).$$

この補題から，ある多項式 $P_r\in\mathcal{S}$, ただし $\mathcal{S}$ は $\sigma>1/2$ で絶対収束する Dirichlet 級数の成す環，が存在し，$\overline{\zeta}_r(s\,;\alpha)=P_r(\zeta(s,\alpha))$ が成立することがわかる．具体例を挙げると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\overline{\zeta}_2(s\,;\alpha)&=\frac{1}{2}\zeta(s,\alpha)^2-\frac{1}{2}\zeta(2s,\alpha)\\ \overline{\zeta}_3(s\,;\alpha)&=\frac{1}{6}\zeta(s,\alpha)^3-\frac{1}{2}\zeta(s,\alpha)\zeta(2s,\alpha)+\frac{1}{3}\zeta(3s,\alpha).\end{aligned}$$

Theorem 1.1 と上の補題により次の定理を得る．

Theorem 2.6. $0<\alpha<1$ は超越数又は $1/2$ でない有理数とする．$f(s)$ は K の内部で正則で，K で連続とし，$g(s):=P_r(f(s))$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\left\{\max_{s\in K}\left|\overline{\zeta}_r(s+i\tau\,;\alpha)-g(s)\right|<\varepsilon\right\}>0.$$

$\alpha=1$ である場合は，$f(s)$ に零点持たないという条件を加えれば，同様の主張が成り立つ．

2.4 Tornheim-Hurwitz type 2 重ゼータ関数

ここでは次で定義される Tornheim-Hurwitz type 2 重ゼータ関数の普遍性を考える．

$$T(s_1,s_2,s_3\,;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3):=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha_1)^{s_1}(n+\alpha_2)^{s_2}(m+n+\alpha_3)^{s_3}},$$

ただし $0<\alpha_1,\alpha_2\le 1$, $0<\alpha_3\le 2$, $\Re(s_1+s_3)>1$, $\Re(s_2+s_3)>1$, $\Re(s_1+s_2+s_3)>2$ である．$T(s_1,s_2,s_3):=T(s_1,s_2,s_3\,;1,1,2)$ と書くことにし，Tornheim 2 重ゼータ関数と呼ぶことにする．この関数の正の整数点での値などは多くの数学者により研究されている (例えば [13, Introduction] を参照して頂きたい)．3 変数関数として $T(s_1,s_2,s_3)$ は $\mathbb{C}^3$ 有理

型に [10, Theorem 1] で接続されている (多重ゼータ関数の解析的性質がまとめられたものとして [12] を挙げておく). Okamoto [19, Theorem 7] により $T(s_1, s_2, s_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は $\mathbb{C}^3$ 有理型に接続され, possible singularities は次の集合上にあることが示された.

$$s_1 + s_3 = 1 - l, \quad s_2 + s_3 = 1 - l, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 2, \qquad l \in \mathbb{N}_0.$$

[14, Theorem 2] により次の定理が示されているが, hybrid universality を使うことにより, 簡単な証明を与えることができる. このサブセクションでは $j, k \in \mathbb{N}$, $D := \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \Re(s + j) < 1\}$, K を D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする.

Theorem 2.7 (see [14, Theorem 2]). $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ を超越数, $j \le k$, $2 \le k$, $f(s_3)$ は K の内部で正則で, K で連続とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \left\{ \max_{s_3 \in K} \left| T(j, k, s_3 + i\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - f(s_3) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Proof. まず $j < k$ とする. シャッフル積公式の視点から, $\Re(s_3) > 1$ であれば

$$\begin{aligned} T(j, k, s_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = &\sum_{h=0}^{j-1} \binom{k-1+h}{h} \zeta_2(k + h + s_3, j - h; \alpha_3, \alpha_1) \\ &+ \sum_{h=0}^{k-1} \binom{j-1+h}{h} \zeta_2(j + h + s_3, k - h; \alpha_3, \alpha_2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

この分解をするために $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ が必要になる. 調和積公式から

$$\begin{aligned} \zeta_2(j + s_3, k; \alpha_3, \alpha_2) = &\zeta(j + s_3, \alpha_3)\zeta(k, \alpha_3) - \zeta_2(k, j + s_3; \alpha_2, \alpha_3) \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \alpha_3)^{j+s_3}(n + \alpha_2)^k}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\zeta(k, \alpha_3) \ne 0$ (例えば [9, Theorem 8.1.1]) であることを注意しておく. 式 (2.2) と (2.3) から,

$$T(j, k, s_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \zeta(j + s_3, \alpha_3)\zeta(k, \alpha_3) + A(j, k, s_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \tag{2.4}$$

ただし $A(j, k, s_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は以下のように定義される関数である.

$$\begin{aligned} A(j, k, s_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := &\sum_{h=0}^{j-1} \binom{k-1+h}{h} \zeta_2(k + h + s_3, j - h; \alpha_3, \alpha_1) \\ &+ \sum_{h=1}^{k-1} \binom{j-1+h}{h} \zeta_2(j + h + s_3, k - h; \alpha_3, \alpha_2) \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \alpha_3)^{j+s_3}(n + \alpha_2)^k} - \zeta_2(k, j + s_3; \alpha_2, \alpha_3). \end{aligned} \tag{2.5}$$

仮定 $j < k$ と $2 \leq k$ から, 上の右辺の関数は $1/2 < \Re(j+s_3) < 1$ で絶対収束する. よって (2.4) の右辺は $1/2 < \Re(j+s_3) < 1$ で解析的である. $j = k$ である場合は

$$T(j,j,s_3\,;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) =$$
$$T(j-1,j,s_3+1\,;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) + T(j,j-1,s_3+1\,;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3).$$

であることを利用すれば $j < k$ である場合に帰着できる. 従って (2.4), (2.5) と Theorem 1.1 により証明が終わる. □

$1 = \alpha_1 + \alpha_2$ である場合は以下のように $f(s_3) \neq A(j,k,s_3\,;\alpha_1,\alpha_2,1)$ という仮定が必要になる. $1, 2, 1/2, 3/2 \neq \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ である場合は近似される関数に仮定は必要ない. 証明は先の方法を多少変更するだけなので省略する.

Theorem 2.8. $1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $j \leq k$, $2 \leq k$, $f(s_3) \neq A(j,k,s_3\,;\alpha_1,\alpha_2,1)$ は K の内部で正則で, K で連続とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{s_3\in K}\left|T(j,k,s_3+i\tau\,;\alpha_1,\alpha_2,1) - f(s_3)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Theorem 2.9. $1, 2, 1/2, 3/2 \neq \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, $j \leq k$, $2 \leq k$, $f(s_3)$ は K の内部で正則で, K で連続とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{s_3\in K}\left|T(j,k,s_3+i\tau\,;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) - f(s_3)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

参考文献

[1] S. Akiyama and H. Ishikawa, *On analytic continuation of multiple LL-functions and related zeta-functions*, Analytic number theory (Beijing/Kyoto, 1999), 1–16, Dev. Math., 6, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[2] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-functions*, Ph.D. Thesis, Universality of Michigan (1979).

[3] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series.* Pacific J. Math. **152** (1992), no. 2, 275–290.

[4] T. Ibukiyama and H. Saito, *On zeta functions associated to symmetric matrices, I. An explicit form of zeta functions,* Amer. J. Math. **117** (1995), 1097–1155.

[5] J. Kaczorowski, M. Kulas, *On the non-trivial zeros off line for L-functions from extended Selberg class*, Monatshefte Math. **150** (2007), 217-232.

[6] Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-function, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[7] A. Laurinčikas, *Universality of the Riemann zeta-function*, J. Number Theory **130** (2010), 2323–2331

[8] Laurinčikas and R. Garunkštis, The Lerch zeta-function, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[9] A. Laurinčikas and R. Garunkšitis, *The Lerch zeta-function,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[10] K. Matsumoto, *On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions.* Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, 17 pp., Bonner Math. Schriften, 360, Univ. Bonn, Bonn, 2003.

[11] K. Matsumoto, Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions,' *Sugaku* 53 (2001), 279-296 (in Japanese); English Transl.: *Sugaku Expositions* 17 (2004), 51–71.

[12] K. Matsumoto, Analytic theory of multiple zeta-functions and its applications. (in Japanese) *Sūgaku* 59 (2007), no. 1, 24-45.

[13] T. Nakamura, *A functional relation for the Tornheim double zeta function.* Acta Arith. **125** (2006), no. 3, 257–263.

[14] T. Nakamura, *The universality for linear combinations of Lerch zeta functions and the Tornheim-Hurwitz type of double zeta functions*, to appear in Monatshefte Math.

[15] T. Nakamura, *Zeros and the universality for the Euler-Zagier Hurwitz type of multiple zeta-functions*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 691-700.

[16] T. Nakamura, The joint universality for the Euler-Zagier double zeta and L-functions, RIMS 研究集会報告集, 解析数論およびその周辺の諸問題

[17] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *On universality for linear combinations of L-functions*, preprint.

[18] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *Applications of hybrid universality to multivariable zeta-functions*, preprint.

[19] T. Okamoto, *Generalizations of Apostol-Vu and Mordell-Tornheim multiple zeta functions*, Acta Arith. **140** (2009) no. 2, 169–187.

[20] Ł. Pańkowski, *Hybrid joint universality theorem for the Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **141** (2010) no. 1, 59–72.

[21] Ł. Pańkowski, *Hybrid joint universality theorem for L-functions without the Euler product*, submitted.

[22] J. Sander and J. Steuding, *Joint universality for sums and products of Dirichlet L-functions*, Analysis **26** (2006), 295–312.

[23] J. Steuding, Value Distributions of L-functions, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.